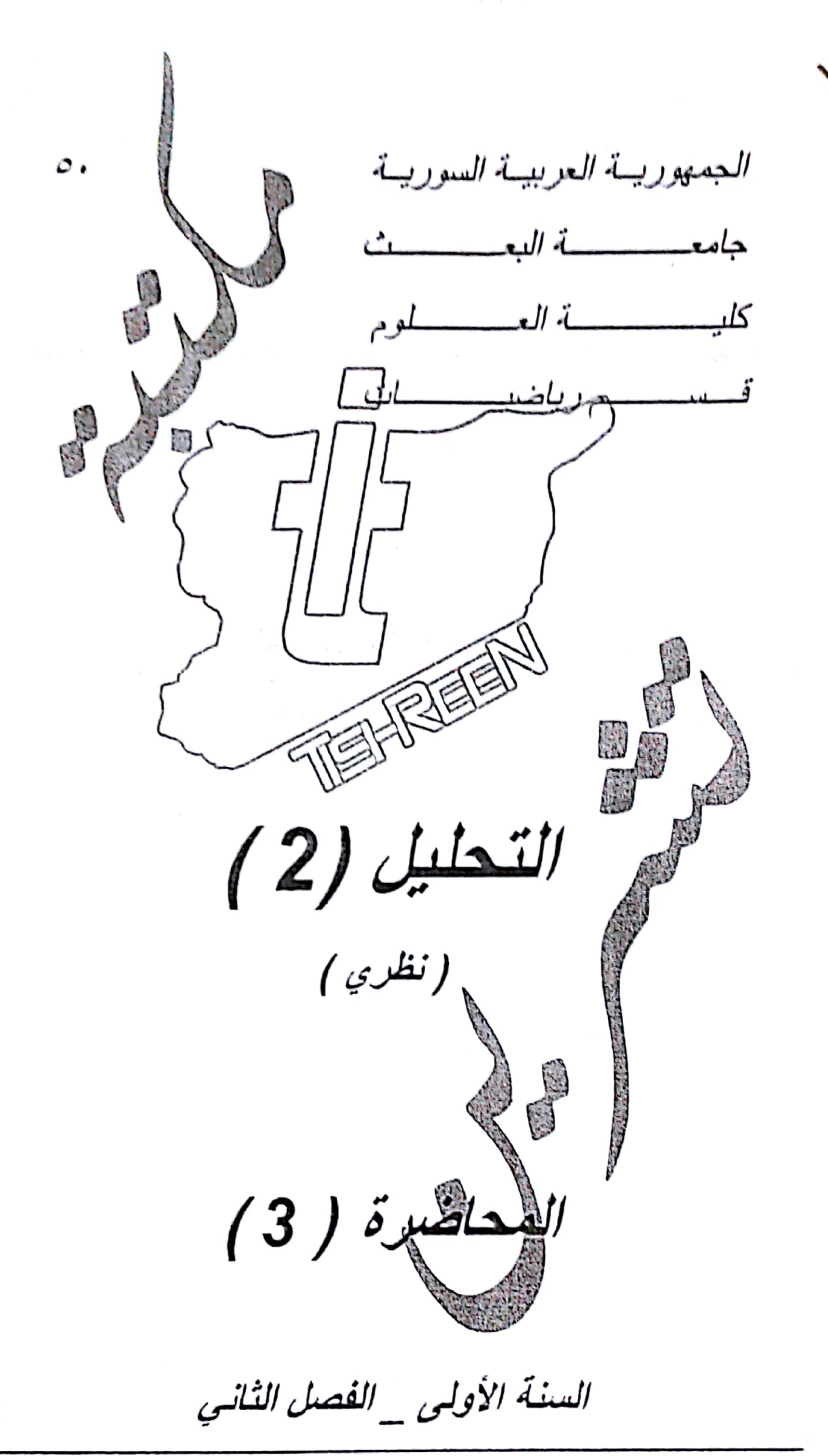
\



الجمهوريـة العربيـة السوريـة

جامعــــة البعــــث

كليــــة العـــلوم

قســـم رياضـــيات

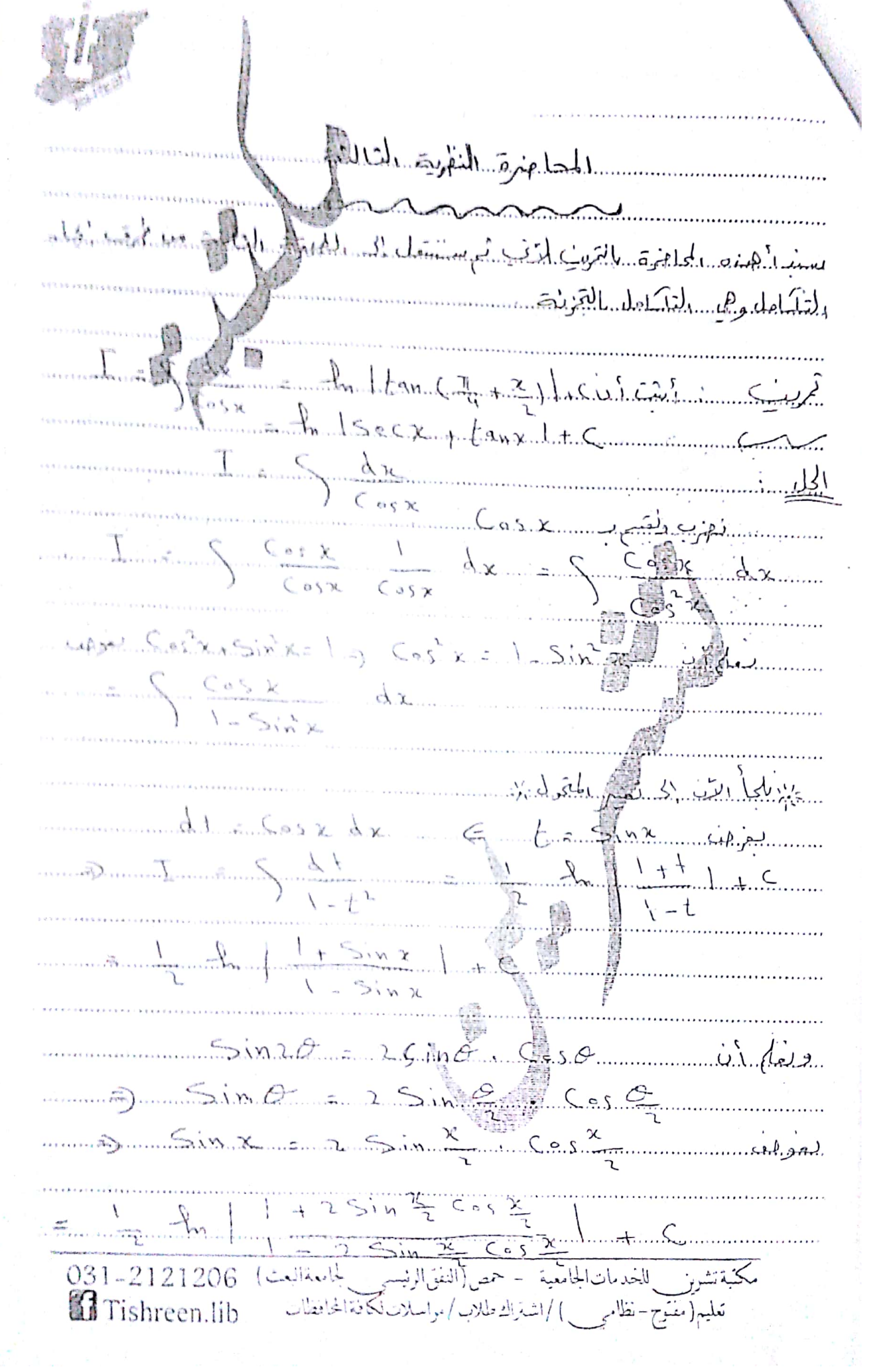
٥٠

التحليل (2)

(نظري)

المحاضرة (3)

السنة الأولى _ الفصل الثاني



المحاضرة النظرية الثالثة

سنبدأ هذه المحاضرة بالتمرين الآتي ثم سننتقل الى الطريقة الرابعة من طرق ايجاد التكامل وهي التكامل بالتجزئة

تمرين: أثبت أن:

$$I=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+c$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+c$$

الحل:

$$I=\int\frac{dx}{\cos x}$$

نضرب ونقسم ب $\cos x$

$$I=\int\frac{\cos x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

نعلم أن $\cos^2 x+\sin^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x$ نعوض

$$=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

نلجأ الآن الى تغيير المتحول:

نفرض $t=\sin x \Rightarrow dt=\cos x\,dx$

$$\Rightarrow I=\int\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c$$

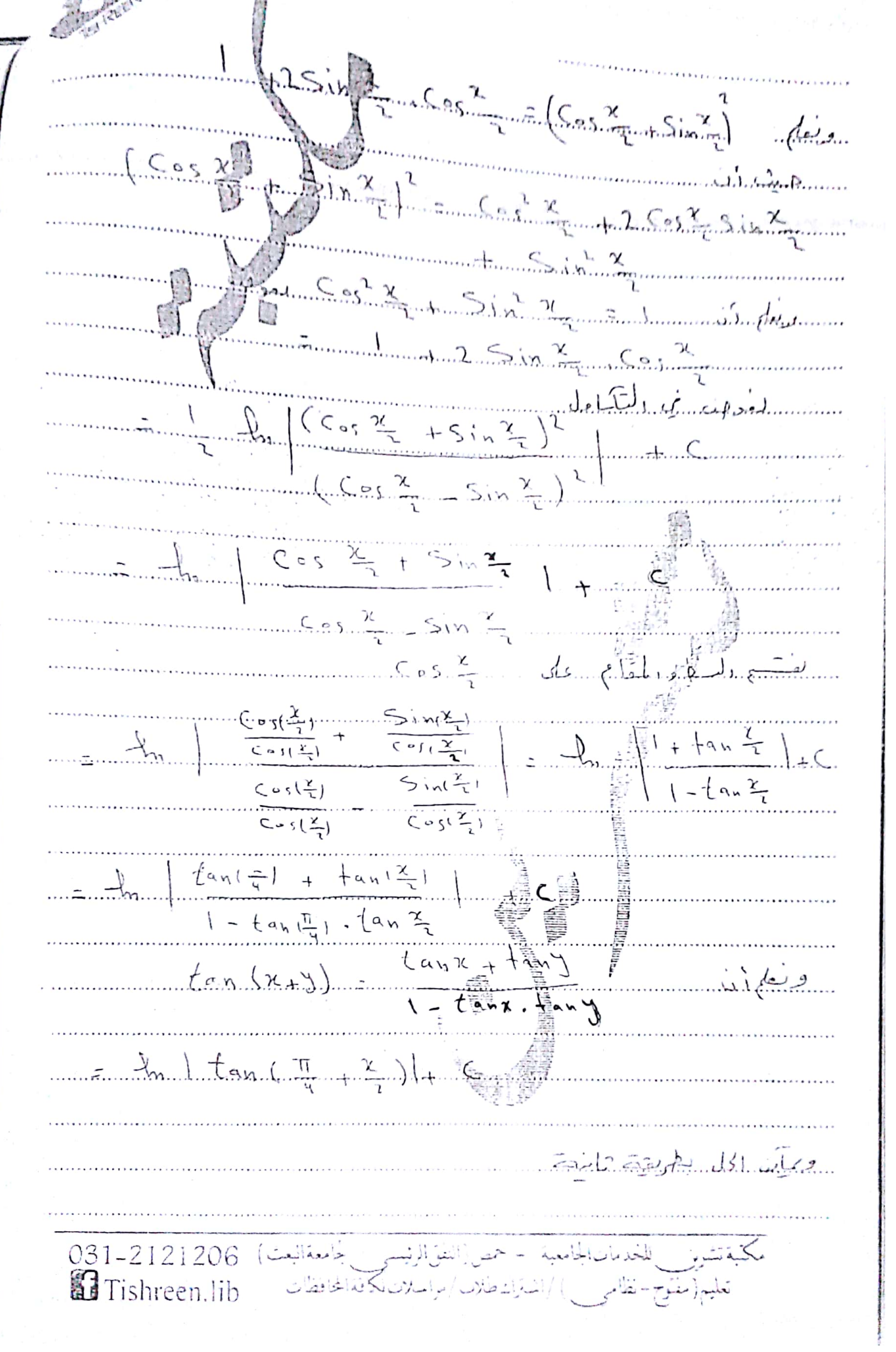
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$$

ونعلم أن $\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

نعوض $\Rightarrow \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right|+c$$



ونعلم أن $1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2$

حيث أن

$$\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$$

ونعلم أن $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$

$$= 1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

نعوض في التكامل

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\right| + C$$

نقسم البسط والمقام على $\cos\frac{x}{2}$

$$= \ln\left|\frac{\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} + \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} - \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}\right| = \ln\left|\frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan(\frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{x}{2})}{1 - \tan(\frac{\pi}{4})\cdot\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

ونعلم أن $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$$= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$$

ويمكن الحل بطريقة ثانية

الطريقة الثانية: $I = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x \, dx$

نضرب ونقسم بـ $\sec x + \tan x$

$= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$= \ln |\sec x + \tan x| + c$

التكامل بالتجزئة:

ليكن $u(x)$ و $v(x)$ تابعين قابلين للاشتقاق ومشتقاتهما توابع مستمرة.

$d(u.v) = v\,du + u\,dv$

بالتكامل بالنسبة للمتحول x نجد أن:

$u.v = \int v\,du + \int u\,dv$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

هذا القانون للتطبيق مباشرة.

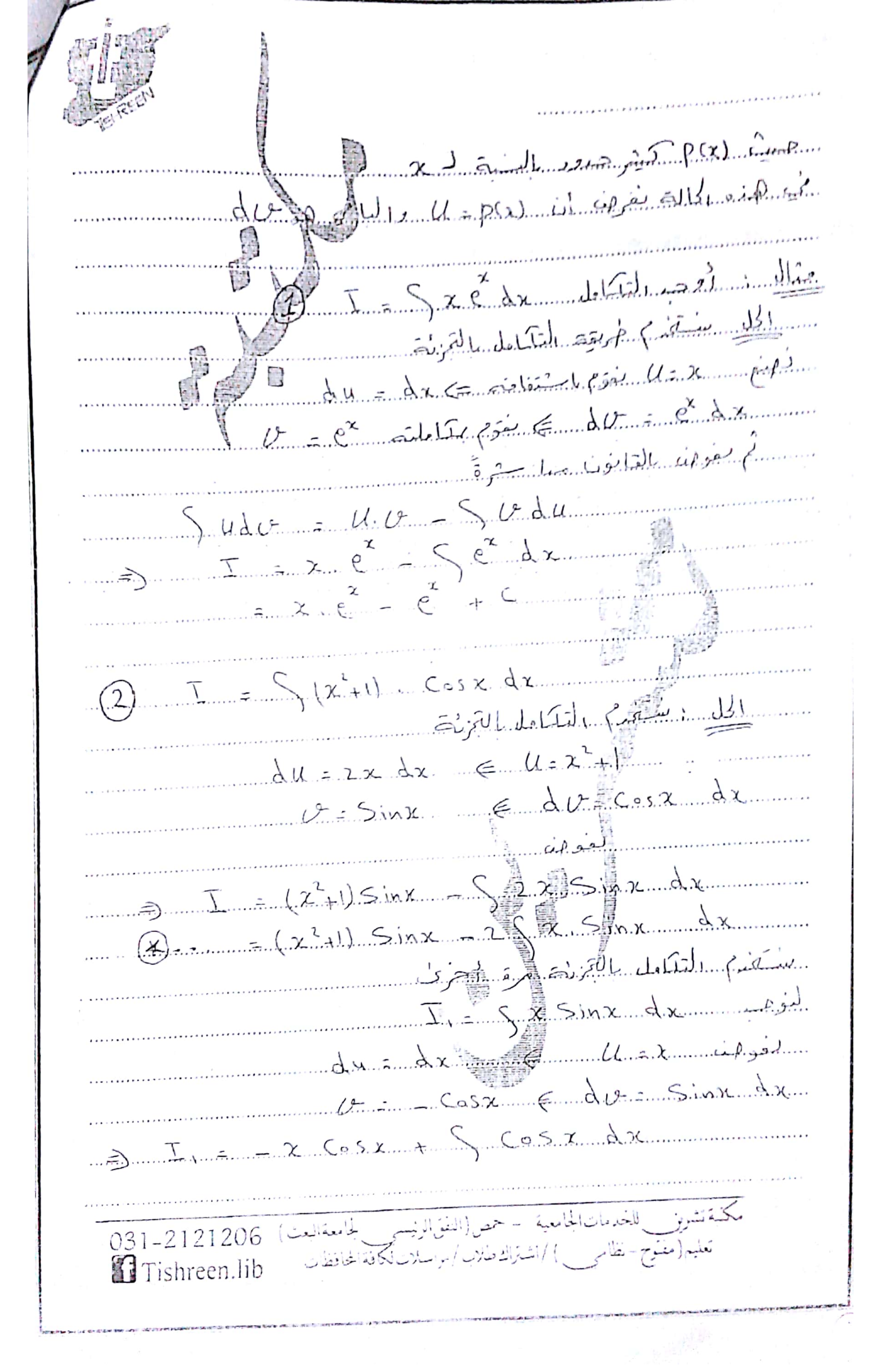
ملاحظة: يمكن استخدام التكامل بالتجزئة أكثر من مرة وبالنسبة لفرض u و dv فتكون حسب النماذج الآتية حيث نفرض u ونقوم بالاشتقاق لنحصل على du والباقي يكون dv ونقوم بالمكاملة ثم نعوض بالقانون مباشرة.

* النموذج الأول:

$I = \int P(x) \sin ax \, dx$

أو $I = \int P(x) \cos ax \, dx$

أو $I = \int P(x) e^{ax} dx$



حيث $p(x)$ كثير حدود بالنسبة لـ x

في هذه الحالة نفرض أن $u = p(x)$ والباقي dv

مثال: أوجد التكامل

① $I = \int x e^x \, dx$

الحل: نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة

نفرض $u = x$ نقوم باشتقاقه $\Leftarrow du = dx$

$dv = e^x \, dx$ $\Leftarrow$ نقوم بمكاملته $v = e^x$

ثم نعوض بالقانون مباشرة

$$\int u \, dv = u.v - \int v \, du$$

$$\Rightarrow I = x . e^x - \int e^x \, dx$$

$$= x . e^x - e^x + c$$

② $I = \int (x^2+1) . \cos x \, dx$

الحل: نستخدم التكامل بالتجزئة

$du = 2x \, dx \Leftarrow u = x^2+1$

$v = \sin x \Leftarrow dv = \cos x \, dx$

نعوض

$$\Rightarrow I = (x^2+1) \sin x - \int 2x \sin x \, dx$$

(*) $= (x^2+1) \sin x - 2\int x . \sin x \, dx$

نستخدم التكامل بالتجزئة مرة أخرى

لنوجد $I_1 = \int x \sin x \, dx$

نفرض $du = dx \Leftarrow u = x$

$v = -\cos x \Leftarrow dv = \sin x \, dx$

$$\Rightarrow I_1 = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$I = x\cos x - \sin x + c$

نعوض في (٢) نجد أن

$I = (x^2 + 1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

*النوع الثاني :

$I = \int p(x) \arcsin x \, dx$

$I = \int p(x) \arccos x \, dx$

$I = \int p(x) \arctan x \, dx$

$I = \int p(x) \operatorname{arccot} x \, dx$

$I = \int p(x) \ln x \, dx$

في هذه الحالات جميعها نفرض أن $dv = p(x)\,dx$ والباقي هو u

مثال : أوجد التكامل $I = \int \arcsin x \, dx$

نفرض $u = \arcsin x \Leftarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

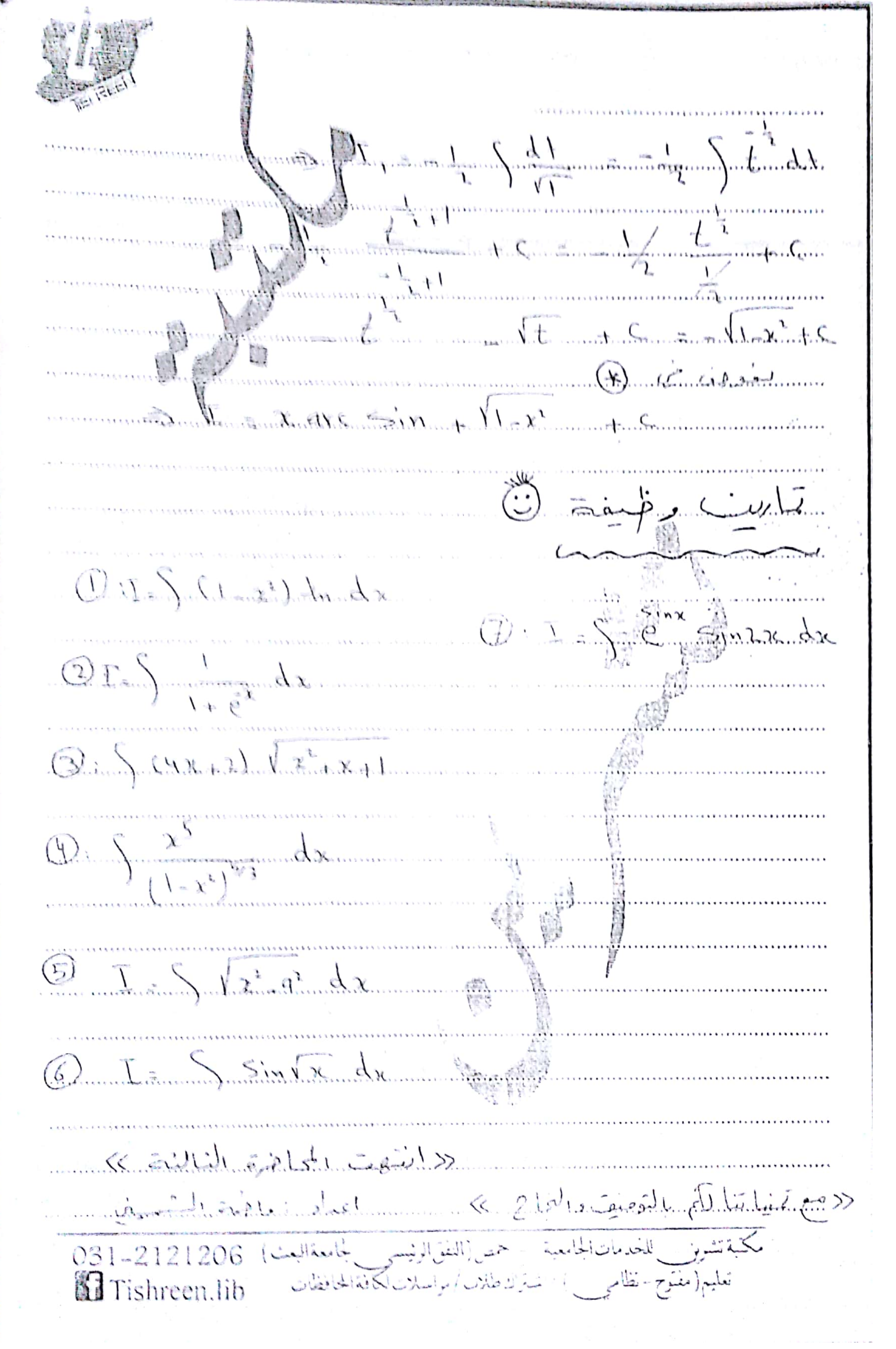
$dv = 1\,dx \Leftarrow v = x$

نعوض بالقانون مباشرة

$I = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ---- (*)

نوجد $I_1 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ بطريقة تغير المتحول

نفرض $1 - x^2 = t \Leftarrow dt = -2x\,dx \Leftarrow x\,dx = -\frac{1}{2} dt$



$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt$

$= -\frac{1}{2}\,\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

نعوض في (*)

$I = x \arcsin + \sqrt{1-x^2} + c$

تمارين وظيفة

① $I = \int (1-x^2)\ln\, dx$

② $I = \int \frac{1}{1+e^{x}}\, dx$

③ $\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$

④ $\int \frac{x^5}{(1-x^2)^{1/3}}\, dx$

⑤ $I = \int \sqrt{x^2-a^2}\, dx$

⑥ $I = \int \sin\sqrt{x}\, dx$

⑦ $I = \int e^{\sin x} \sin 2x\, dx$

« انتهت المحاضرة الثالثة »

« مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح » اعداد : ماجدة الشميطي